01　计数与来源条件（题 1–2）

题 1｜无放回抽样：颜色组合与指定顺序

题目（习题一 A14）。7 个球中有 2 红、3 黑、2 白，无放回取三次。求：（1）恰一红一黑一白；（2）全黑；（3）依次为红、黑、白。

标准解答。不考虑顺序的三球组合等可能，共有 $\binom{7}{3}=35$ 种。因此

$$P(\text{各色一个})=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{12}{35}.$$

$$P(\text{全黑})=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{35}.$$

指定顺序时，逐次使用条件概率：

$$P(\text{红、黑、白})=\frac{2}{7}\frac{3}{6}\frac{2}{5}=\frac{2}{35}.$$

应用。“各色一个”包含 $3!$ 种颜色顺序，概率为指定一种顺序的 6 倍。分子、分母的计数方式必须一致。

题 2｜先选组再抽样：全概率与贝叶斯

题目（习题一 B6）。第一组 30 件中有 10 件优质品，第二组 20 件中有 15 件优质品。等可能选一组，在该组内无放回取两次。求第一次为优质品的概率；已知第一次为优质品，求第二次为非优质品的概率。

标准解答。令 H_i 表示选中第 i 组，Q_j 表示第 j 次取到优质品。由全概率公式（law of total probability），

$$P(Q_1)=\frac{1}{2}\frac{10}{30}+\frac{1}{2}\frac{15}{20}=\frac{13}{24}.$$

观测到 Q_1 后，由贝叶斯公式（Bayes' theorem），

$$P(H_1\mid Q_1)=\frac{(1/2)(10/30)}{13/24}=\frac{4}{13}.$$

$$P(H_2\mid Q_1)=\frac{9}{13}.$$

第一组剩 29 件，其中 20 件非优质；第二组剩 19 件，其中 5 件非优质，故

$$\begin{aligned}P(Q_2^c\mid Q_1)&=\frac{4}{13}\frac{20}{29}+\frac{9}{13}\frac{5}{19}\\&=\frac{2825}{7163}\approx 0.3944.\end{aligned}$$

应用。观察改变来源权重，无放回改变组内组成，两处都须更新。也可直接算 $P(Q_1Q_2^c)/P(Q_1)$。

02　共同条件与离散模型（题 3–4）

题 3｜共同天气：条件独立不能直接当作独立

题目（习题一 B8）。雾霾概率为 0.4。雾霾天每人戴口罩概率为 0.2，非雾霾天为 0.01；给定天气后，各人的选择独立。求随机一人戴口罩的概率；同一天选三人，至少一人戴口罩的概率。

标准解答。设 H 为雾霾，M_i 为第 i 人戴口罩。

$$P(M_1) = 0.4(0.2) + 0.6(0.01) = 0.086.$$

给定天气后，用补事件求“至少一个”，再按天气加权：

$$\begin{aligned} &P(M_1 \cup M_2 \cup M_3) \\ &= 0.4(1 - 0.8^3) + 0.6(1 - 0.99^3) \\ &= 0.2130206. \end{aligned}$$

应用。三人共用天气，不能写成 $1 - (1 - 0.086)^3$。若题目明确各次观察独立、单次成功率为 q，成功次数才服从 $B(n, q)$。

题 4｜列分布律：二项、超几何与截断等待

题目（选自习题二 A1）。分别求：（1）独立掷骰子三次，点数大于 4 的次数；（2）2 红、3 白中无放回取两球的红球数；（3）从同一袋放回抽球，首次取红即停止，最多三次，抽取次数的分布。

标准解答。三个小问分别记变量为 X。

1. 单次成功率 $p = 2/6 = 1/3$，三次独立，故 $X \sim B(3, 1/3)$。
2. 无放回成功数服从超几何分布（hypergeometric distribution）：$P(X = k) = \binom{2}{k}\binom{3}{2-k} / \binom{5}{2}$。
3. $X = 1$ 表示首次即红；$X = 2$ 表示先白后红；$X = 3$ 只要求前两次均白，第三次颜色不限。

小问	全部取值	按取值顺序的概率
(1)	$0, 1, 2, 3$	$8/27,\ 4/9,\ 2/9,\ 1/27$
(2)	$0, 1, 2$	$3/10,\ 3/5,\ 1/10$
(3)	$1, 2, 3$	$2/5,\ 6/25,\ 9/25$

应用。若第 (3) 问不设次数上限，X 才是普通几何分布，$P(X = k) = (3/5)^{k-1}(2/5)$。若改问第 r 次取红的总次数，用负二项分布：$\binom{k-1}{r-1}(2/5)^r(3/5)^{k-r}$，$k \geq r$。

03　泊松计数与密度计算（题 5–6）

题 5｜泊松计数：时间窗口与条件概率

题目（习题二 B12）。短信到达服从速率为每分钟 0.05 的泊松过程。求 10:00–12:00 恰收到六条的概率；已知至少五条，求恰为六条的概率。

标准解答。窗口为 120 分钟，平均次数 $\lambda = 0.05 \times 120 = 6$，故短信数 $N \sim \mathrm{Pois}(6)$。

$$P(N=6) = e^{-6}\frac{6^6}{6!} \approx 0.1606.$$

由于 $\{N=6\} \subseteq \{N \ge 5\}$，交集就是 $\{N=6\}$：

$$\begin{aligned} P(N=6 \mid N \ge 5) &= \frac{e^{-6}6^6/6!}{1 - e^{-6}\sum_{k=0}^{4} 6^k/k!} \\ &\approx 0.2247. \end{aligned}$$

变式。若问从 10:00 起等待下一条短信超过 10 分钟的概率，改用 $T \sim \mathrm{Exp}(0.05)$：$P(T>10) = P(N(10)=0) = e^{-0.5}$。计数用平均次数，等待时间用速率。

题 6｜连续密度：归一化、CDF、积分与重复试验

题目（习题二 B17）。$f(x) = c(4-x^2)$，$0<x<2$，其余为零。求 c、CDF、$P(-1<X<1)$；独立观察五次，求该事件恰发生两次的概率。

标准解答。由密度积分为 1，

$$1 = c\int_0^2 (4-x^2)\,dx = \frac{16c}{3} \implies c = \frac{3}{16}.$$

CDF 在支撑内由积分得到，支撑外补齐 0、1：

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{3x}{4} - \dfrac{x^3}{16}, & 0 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

事件区间与支撑相交后只剩 $(0,1)$，因此

$$q = P(-1<X<1) = \int_0^1 \frac{3}{16}(4-x^2)\,dx = \frac{11}{16}.$$

令 K 为五次中该事件发生的次数，则 $K \sim B(5, 11/16)$，故

$$P(K=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{11}{16}\right)^2\left(\frac{5}{16}\right)^3 \approx 0.1442.$$

应用。原变量连续，事件发生次数仍是离散型。若给的是连续型 CDF，先在连接处用连续性确定参数，再逐段求导；还须检查单调性。

04　指数寿命与正态概率（题 7–8）

题 7｜指数寿命：剩余时间与混合来源

题目（习题二 B29）。产品来自甲、乙厂的概率为 0.4、0.6，寿命分别服从 $\mathrm{Exp}(1/3)$、$\mathrm{Exp}(1/6)$，时间单位为年。求：（1）寿命超过六年；（2）已知来自甲厂，使用四个月未坏，能用到一年未坏；（3）未知厂别时，同样已使用四个月未坏，能用到一年未坏。

标准解答。设寿命为 T，混合生存函数为

$$S(t)=P(T>t)=0.4e^{-t/3}+0.6e^{-t/6},\qquad t\ge 0.$$

1. $P(T>6)=0.4e^{-2}+0.6e^{-1}\approx 0.2749$。
2. 四个月为 $1/3$ 年，额外等待为 $2/3$ 年。已知甲厂时用无记忆性：

$$\begin{aligned}P(T>1\mid T>1/3,\text{甲})&=e^{-(1/3)(2/3)}\\&=e^{-2/9}\approx 0.8007.\end{aligned}$$

3. 未知厂别时用条件概率比值：

$$\begin{aligned}P(T>1\mid T>1/3)&=\frac{S(1)}{S(1/3)}\\&=\frac{0.4e^{-1/3}+0.6e^{-1/6}}{0.4e^{-1/9}+0.6e^{-1/18}}\\&\approx 0.8584.\end{aligned}$$

应用。混合指数寿命一般不再无记忆。已存活的信息改变厂别权重，不能按原权重平均两厂的剩余寿命概率。

题 8｜正态分布：识别参数并标准化

题目（习题二 B27）。$f_X(x)=ae^{-x^2}$，$x\in\mathbb{R}$。求 a 和 $P(X>1/2)$。

标准解答。由 $\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$，有 $a=1/\sqrt{\pi}$。与正态密度的指数 $-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)$ 比较，得

$$\mu=0,\qquad 2\sigma^2=1,\qquad X\sim N(0,1/2).$$

标准差为 $\sigma=1/\sqrt{2}$，故

$$\begin{aligned}P(X>1/2)&=P\left(\frac{X}{1/\sqrt{2}}>\frac{1/2}{1/\sqrt{2}}\right)\\&=1-\Phi(1/\sqrt{2})\approx 0.2398.\end{aligned}$$

变式（反求参数）。若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，要求 $P(|X-\mu|<3)\ge 0.9$，则

$$\begin{aligned}2\Phi(3/\sigma)-1&\ge 0.9\\3/\sigma&\ge \Phi^{-1}(0.95)\approx 1.64485\\\sigma&\le 1.8239.\end{aligned}$$

应用。标准化除以标准差；右尾用 $1-\Phi$，负数用 $\Phi(-z)=1-\Phi(z)$。反求尺度时注意不等号方向。

05　函数分布与联合表（题 9–10）

题 9｜变量函数：线性变换与绝对值的分支

题目（习题二 B33）。$f_X(x)=c(4-x^2)$，$-1<x<2$，其余为零。求 c；$Y=3X$ 的密度；$Z=|X|$ 的 CDF 和密度。

标准解答。归一化得 $1=c\int_{-1}^{2}(4-x^2)\,dx=9c$，所以 $c=1/9$。

对线性变换，反函数为 $x=y/3$，支撑为 $-3<y<6$。由 $f_Y(y)=f_X(y/3)/3$，得

$$f_Y(y)=\begin{cases}(36-y^2)/243, & -3<y<6,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

对绝对值变换，$0<z<1$ 时 $z,-z$ 都在原支撑内；$1<z<2$ 时只有 z 有效。因此

$$f_Z(z)=\begin{cases}(8-2z^2)/9, & 0<z<1,\\ (4-z^2)/9, & 1<z<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

由 $F_Z(z)=P(-z\le X\le z)$，前两段分别在 $[-z,z]$ 与 $[-1,z]$ 上积分，得到：

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{24z-2z^3}{27}, & 0\le z<1,\\ \dfrac{12z-z^3+11}{27}, & 1\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$

应用。多分支要把各有效反解的贡献相加；线性变换别漏绝对导数因子。检查 $F_Z(1)=22/27$、$F_Z(2)=1$。

题 10｜联合表：由边际 CDF 求条件分布与独立性

题目（习题三 A12）。F_X 在 1、2 处从 0 跳到 0.3、1；F_Y 在 0、1 处从 0 跳到 0.4、1。已知 $P(X=1,Y=0)=0.1$。求联合 PMF、给定 $Y=0$ 时 X 的 CDF，并判断独立性。

标准解答。CDF 跳跃量等于点概率：$P_X(1)=0.3, P_X(2)=0.7$，$P_Y(0)=0.4, P_Y(1)=0.6$。用行列和补表：

$X\backslash Y$	0	1	P_X
1	0.1	0.2	0.3
2	0.3	0.4	0.7
P_Y	0.4	0.6	1

给定 $Y=0$，只在该列内归一化：

$$P(X=1\mid Y=0)=\frac{0.1}{0.4}=\frac14,\qquad P(X=2\mid Y=0)=\frac34.$$

$$F_{X|Y}(x\mid 0)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1/4, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

因 $P(X=1,Y=0)=0.1\neq 0.3\times 0.4$，$X,Y$ 不独立。

端点检查。由本题边际，$P(1\le X<2)=F_X(2-)-F_X(1-)=0.3$；直接用 $F_X(2)-F_X(1)$ 会得到另一个事件的概率。条件 CDF 的跳点也取右侧值。

06　二维积分与条件密度（题 11–12）

题 11｜二维密度：画区域、定积分限、求边际

题目（习题三 B4）。$f(x,y)=c(y-x)$，$0<x<y<1$，其余为零。求 c、$P(X+Y\le 1)$、$P(X<1/2)$。

标准解答。固定 y，x 从 0 到 y，由归一化得

$$1=c\int_0^1\int_0^y (y-x)\,dx\,dy=\frac{c}{6}\ \Longrightarrow\ c=6.$$

对 $X+Y\le 1$，须同时满足 $y>x$ 和 $y\le 1-x$，故 $0<x<1/2$、$x<y<1-x$：

$$\begin{aligned}P(X+Y\le 1)&=\int_0^{1/2}\int_x^{1-x} 6(y-x)\,dy\,dx\\&=\int_0^{1/2} 3(1-2x)^2\,dx=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

求 X 的边际时，固定 x，消去 y：

$$f_X(x)=\int_x^1 6(y-x)\,dy=3(1-x)^2,\quad 0<x<1,$$

其余为零。因此 $P(X<1/2)=\int_0^{1/2}3(1-x)^2\,dx=7/8$。

应用。积分区域是“支撑与所求事件的交集”。本题密度不均匀，不能用面积比。若换积分次序，边界须重新确定。

题 12｜连续条件：固定截线后重新归一化

题目（习题三 A20）。$f(x,y)=5x/4$，$y^2<x<1$，其余为零。求 $f_Y(y)$、$f_{X\mid Y}(x\mid y)$ 和 $P(X>1/2\mid Y=1/2)$。

标准解答。支撑说明 $-1<y<1$；固定 y 时，x 从 y^2 到 1。因此

$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{y^2}^1 \frac{5}{4}x\,dx=\frac{5}{8}(1-y^4), & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

对 $-1<y<1$，由条件密度公式（conditional density），

$$f_{X\mid Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{2x}{1-y^4}, & y^2<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

给定 $Y=1/2$，X 的范围为 $(1/4,1)$，故

$$P(X>1/2\mid Y=1/2)=\int_{1/2}^1 \frac{2x}{1-1/16}\,dx=\frac{4}{5}.$$

应用。连续型 $P(Y=1/2)=0$，须用密度比，不能用点概率作分母。给定 $Y=y$ 是截线；给定 $Y>y$ 则仍对二维区域积分。